IST SETI - 3

TRAITEMENT DU SIGNAL

Cours de M Jean AUVRAY

BIBLIOGRAPHIE

[1] Traité d'électricité Ecole polytechnique de Lausanne Tome VI Editions DUNOD
Frédéric de Coulomb Théorie et traitement des signaux

[2] Introduction à la théorie de la communication
E Roubine édt : MASSON 3 tomes
Signaux certains
Signaux aléatoires
Théorie de l'information

[3] Introduction à la théorie du signal
PICINBONO edt :DUNOD

[4] Méthodes et techniques du traitement de signal
J MAX edt :MASSON 2 Tomes

[5) Distributions – Signal
E ROUBINE edt : EYROLLES

[6] Méthodes rapides de transformation du signal
LIFERMAN Edt : MASSON

[7) Eléments de théorie du signal
Signaux certains J P DELMAS
Signaux aléatoires M CHARBIT
Communications analogiques D VENTRE
Collection Ellipse

[8] Théorie de la transmission de l'information
SPATARU Edt : MASSON 1973

[9] Voir aussi ouvrages de la collection du CNET , en particulier les livres de BELLANGER

INTRODUCTION

Le traitement du signal est une discipline indispensable que tout ingénieur doit connaître au moins dans ses grandes lignes. L'amélioration des performances des systèmes au cours des 20 dernières années est due pour la plus grande partie à l'application des techniques de traitement de signal plutôt qu'au perfectionnement du matériel. Un RADAR actuel a des performances sans communes mesure avec celle d'un RADAR de 1960 et cependant sa structure matérielle est sensiblement la même, mais les techniques de traitement de signal faisant appel à des traitements numériques sophistiqués permettent d'extraire de l'écho reçu une quantité beaucoup plus grande d'information.

Le but du traitement du signal est en effet **d'extraire le maximum d'information utile sur un signal perturbé par le bruit .**

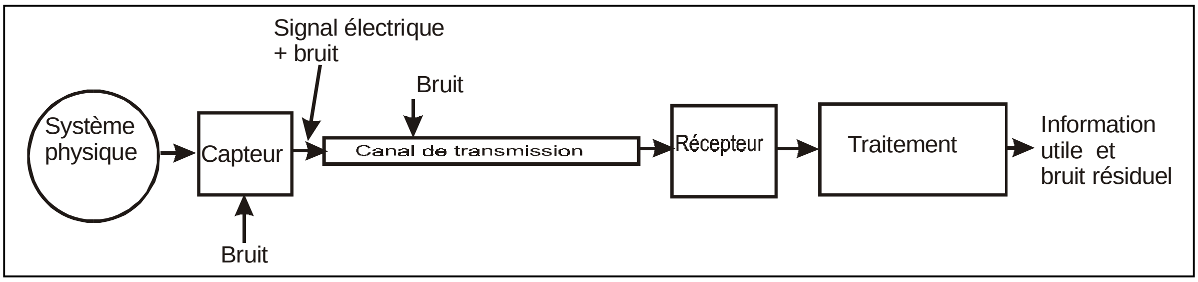
Cette phrase comporte 4 mots importants : Signal et bruit, traitement, information. qui vont être explicités dans les chapitres successifs de ce cours .

On pense le plus souvent que le bruit est un signal aléatoire qui se superpose au signal utile, en réalité les notions de signal et bruit sont très relatives. Pour un technicien des télécommunications qui écoute un émetteur lointain relayé par un satellite, le signal provenant d'une source astrophysique (soleil, quasar) placée malencontreusement dans la même direction est un bruit. Mais pour l'astronome qui s'intéresse à la source astrophysique, c'est le signal du satellite qui est gênante , ainsi le bruit c'est ce qui se superpose au signal que vous voulez étudier .

La grandeur essentielle est le **rapport signal sur bruit** , quotient des puissances du signal et du bruit, c'est ce quotient qu'il faut augmenter au maximum.

L'amplification n'est pas un procédé de traitement du signal car elle ne contribue en aucune manière à la séparation du signal et du bruit, ces deux éléments sont amplifiés de la même façon et le rapport S/B est inchangé, il est même un peu dégradé par suite du bruit propre de l'amplificateur. Bien sûr une amplification du signal reçu est souvent nécessaire pour atteindre un niveau pour lequel il est possible d'appliquer des méthodes de traitement, mais nous n'aborderons pas ce sujet ici .

Un système de mesure a de façon générale la structure ci dessous, le phénomène physique que l'on veut étudier est présenté à un capteur qui le transforme en un signal électrique tension ou courant (plus rarement un signal optique) A ce niveau un bruit est ajouté .L'ensemble chemine sur un canal de transmission lui même bruyant. Il atteint enfin le récepteur derrière lequel est effectué le traitement .



Pour améliorer le rapport signal sur bruit il faut connaître les caractéristiques respectives de ces deux constituants , puis de quelle façon elles sont modifiées à la traversée d'un système, linéaire ou non . Ce cours sera donc organisé de la façon suivante :

Dans une première partie nous verrons comment est décrit un signal et quelles sont les paramètres qui le définissent.

Nous étudierons ensuite le comportement d'un signal appliqué à un système linéaire puis non linéaire .

La troisième partie sera alors consacrée aux méthodes traditionnelles de traitement de signal

Il faut remarquer que nous parlerons de traitement aussi bien analogique que numérique, certaines méthodes font appel à des opérations mathématiques si complexes qu'il difficile de les effectuer de façon analogique , les techniques numériques sont alors mises en œuvre , mais il ne s'agit que d'un problème technique . Par exemple la transformée de Fourier d'un signal bidimentionnel (une image) est le plus souvent effectué à l'ordinateur mais il est possible de l'obtenir par voie purement optique bien plus rapidement .

I . LES SIGNAUX DESCRIPTION ET CARACTERISTIQUES

Nous supposerons dans tout ce qui suit que les signaux sont mis sous forme de tensions électriques .

On distingue habituellement :

Les signaux certains ou déterministes. Ils peuvent être représentés par une fonction v(t) qui permet de calculer leur valeur pour tout t passé ou futur.

Ces signaux peuvent être :

- **Périodiques** x(t)=x(t+KT) T étant la période F=1/T la fréquence de récurrence .

  Ils possèdent alors une puissance moyenne $P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$ mais leur énergie totale $W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$ est infinie
- **Non périodiques** ou impulsionnels On distingue alors les signaux absolument intégrables : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ (Ils constituent l'espace L1), ou de carré sommable $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ (ils constituent l'espace L2)
- Ces signaux n'ont pas de puissance moyenne
-

Les signaux aléatoires .Ils obéissent aux lois du hasard et leur futur est inconnu . Ils possèdent en général une puissance moyenne $Lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = P$

La plupart des signaux naturels sont aléatoires, considérons par exemple le signal recueilli derrière un microphone devant lequel parle un conférencier. A un instant to il est possible à partir de l'enregistrement du signal effectué depuis le début de la conférence de calculer une fonction mathématique v(t)qui représente exactement ce signal ,v(t1) est alors l'amplitude de la tension fournie par le micro à l'instant t1 si 0<t1<to , par contre v(t2) pour t2>to n'a rien à voir avec la vraie valeur à l'instant t2 .Il n'existe pas de fonction v(t) représentant le signal pour tout t .Nous verrons plus loin la conséquence qui en découle pour la transformation de Fourier .

Les signaux naturels aléatoires ou non (le signal périodique d'un générateur) sont forcément continus et indéfiniment dérivables. Il n'en est pas toujours de même des modèles mathématiques que l'on utilise pour les représenter. Ainsi un signal carré idéal n'existe pas.

REPRESENTATION DES SIGNAUX PAR PROJECTION SUR DES BASES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

Nous nous intéresserons ici à des signaux déterministes qui sont décrits par une fonction v(t) . Cette fonction étant connue il devrait être possible de calculer la transformation subie par ces signaux à la traversée d'un système de caractéristiques connues , en fait sauf dans des cas très simples, le calcul est très difficile ,sinon impossible . On utilise couramment la transformation de Fourier et la fonction de transfert des systèmes (du moins s'ils sont linéaires) .Mais cette transformation n'est qu'un exemple de projection sur une base de fonctions .

Définitions

Considérons l'espace E des fonctions possédant une propriété P (par exemple elles sont périodiques de période T, ou de carré sommable etc…).Elles constituent un espace vectoriel si :

La combinaison linéaire de deux fonctions de E appartient aussi à E :

Si $f_1 \subset E$ et $f_2 \subset E$ $a_1.f_1+a_2.f_2 \subset E$

Il existe un produit scalaire noté : $<f_1 \mid f_2>$ qui à deux fonctions f_1 et f_2 , prises dans leur ensemble fait correspondre un nombre . Attention $f_1(t_1).f_2(t_2)$ produit de deux valeurs à deux instants ne satisfait pas à la condition. La définition du produit scalaire est le plus souvent :

$\left\langle f_1 \middle| f_2 \right\rangle = \int_D f_1(u) \cdot f_2^{\times}(u)du$ les fonctions pouvant être complexes. D est le domaine dans lequel sont définies ces fonctions. D'ou la propriété $\left\langle a.f_1 \middle| f_2 \right\rangle = a.\left\langle f_1 \middle| f_2 \right\rangle$ (1)

Deux fonctions sont orthogonales si $\left\langle f_1 \middle| f_2 \right\rangle = 0$

Base de fonctions

Des fonctions ϕ_k appartenant à l'espace E et dépendant d'un paramètre k entier constituent une base si :

Elles sont orthogonales 2 à 2 $\left\langle \phi_k \middle| \phi_j \right\rangle = \delta_{kj}$ (0 si k≠j 1 si k=j)

L'une d'entre elle ne peut pas être fabriquée par une combinaison linéaire des autres , c'est à dire qu'il n'existe pas de coefficients a_k tels que $\sum_k a_k \phi_k = 0$

C'est par exemple le cas des trois vecteurs directeurs i, j, k dans un espace à 3 dimensions.

Théorème fondamental

Soit ϕ_k une fonction de la base et f une fonction quelconque de E

$\left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle$ est un nombre

et $\left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle .\phi_k$ une fonction

$\left(\sum_k \left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle .\phi_k \right)$ est une fonction

donc $\left\langle \left(\sum_k \left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle .\phi_k \right) \middle| \phi_j \right\rangle$ est un nombre qui peut s'écrire aussi en vertu de la propriété (1)

$$\sum_k \left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle \left\langle \phi_k \middle| \phi_j \right\rangle = \left\langle f \middle| \phi_j \right\rangle \qquad car \quad \left\langle \phi_k \middle| \phi_j \right\rangle = \delta_{kj}$$

soit $\left\langle \left(\sum_k \left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle .\phi_k \right) \middle| \phi_j \right\rangle = \left\langle f \middle| \phi_j \right\rangle$

en comparant les deux termes de gauche des produits scalaires :

$f = \left(\sum_k \left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle .\phi_k \right)$ c'est à dire $f = \sum_k a_k .\phi_k$ avec $a_k = \left\langle f \middle| \phi_k \right\rangle$

La fonction f est une somme pondérée de termes de la base

LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Soit E l'ensemble des fonctions périodiques de période T , la somme de deux fonctions de période T est bien une fonction de même période .

Les fonctions de la base sont : $e^{j2\pi k\frac{t}{T}}$, elles sont bien de période T ,leur produit scalaire :

$$\langle \phi_k | \phi_j \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \exp(j2\pi k_1 \frac{t}{T}).\exp(-j2\pi k_2 \frac{t}{T})dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \exp(j2\pi(k_1 - k_2)\frac{t}{T}\, dt$$

est bien nul si $k_1 \neq k_2$ car la fonction sous le signe somme est de période T , et 1 si $k_1 = k_2$

Ces fonctions complexes constituent donc une base , alors en vertu du résultat précédent ; si f est une fonction de période T :

$$f = \sum_k c_k.\exp(j2\pi k \frac{t}{T}) \qquad avec \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t).\exp(-j2\pi k \frac{t}{T})dt$$

résultat classique, on justifie la présence du signe - dans l'exponentielle sous le signe somme , c'est à cause du produit scalaire .

Nous utiliserons beaucoup la forme précédente, le coefficient entier k varie de -∞à +∞ ce qui introduit des fréquences négatives qui troublent parfois certains utilisateurs mal informés.On écrit souvent :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k \frac{t}{T}) + b_k \sin(2\pi k \frac{t}{T})$$

il est facile de vérifier en exprimant les sinus et cosinus en somme ou différence d'exponentielles complexes que :

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - j.sign(k).b_k\right)$$

soit Partie réelle de c_k= partie réelle de c_{-k}

Partie Img de c_k = - Partie img de c_{-k}

Les coefficients ck possèdent une **symétrie hermitienne**

Base continue :intégrale de Fourier

Dans ce qui précède k est un nombre entier, mais il est possible d'imaginer des bases continues pour lesquelles ce paramètre k serait un nombre réel , la sommation discrète Σ est alors remplacée par une intégrale .Par exemple pour des signaux non périodiques on peut être tenté de définir un produit scalaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g^{\times}(u) du$$

cette intégrale peut être finie si les fonctions sont absolument intégrables car l'une des formes de l'inégalité de Schwartz est $\left|\int fg^{\times}\right| \leq \left|\int f\right|.\left|\int g\right|$ or dans ce cas les deux termes de droite sont finis .

Malheureusement la définition directe des fonctions de base rencontre quelques difficultés de convergence , il faut faire appel à des intégrales plus complexes, cependant le résultat subsiste , ce sont les formules essentielles de la transformation de Fourier que nous rencontrerons tout au long de ce cours :

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j2\pi f).e^{j2\pi ft} df \qquad avec \qquad X(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi ft} dt}$$

Nous rencontrerons plus loin un autre exemple de base continue, mais la base de Fourier est de loin la plus importante.

Intérêt de la transformation de Fourier

Parmi toutes les bases possibles la base de Fourier joue un rôle essentiel car ses fonctions de base sont des fonctions propres de l'opérateur linéaire .

Soit s_i le signal de sortie d'un système recevant à son entrée un signal e_i, ce système est linéaire si recevant $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ il fournit en sortie un signal $s = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$. On dit qu'il obéit au **principe de superposition**.

Si les propriétés sont les mêmes à tout instant, on dit que le système est **stationnaire** les signaux d'entrée et de sortie sont alors reliés par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_m \frac{d^m}{dt^m} s(t) + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} s(t) + ... + a_0 s(t) = b_k \frac{d^k}{dt^k} e(t) + ... + b_0 e(t)$$

Le sup de m et k est le degré du système. Remarquez qu'il n'y à pas de termes constants .

Il est facile alors de vérifier que exp(st) est une fonction propre , en effet $\frac{d^m}{dt^m} e^{st} = s^m e^{st}$

L'équation devient alors :

$$H.a_m s^m e(t) + ... + Ha_0 e(t) = b_k s^k e(t) + ... + b_0 e(t)$$

D'ou la valeur propre :

$$H(s) = \frac{b_k s^k + ... + b_0}{a_m s^m + ... + a_0}$$

résultat classique, H est la fonction de transfert en s du système linéaire .

La base de Fourier constitue un cas particulier avec $s=j2\pi f$

Les fonctions de base de Fourier ne sont pas réelles, il est impossible de réaliser un générateur fournissant de telles fonctions , $\exp(j2\pi ft)$ est ce que l'on appelle un **signal analytique** , nous y consacrerons plus loin un chapitre . Par contre l'association de deux fonctions de la base peut être réel. En effet :

$$\cos 2\pi ft = \frac{\exp(2j\pi ft) + \exp(-2j\pi ft)}{2}$$

Les termes de fréquences f et –f sont indissociables

Une sinusoïde n'est pas une fonction propre de l'opérateur linéaire , c'est le signal analytique qui lui est associée qui l'est .

A la traversée du système chaque fonction propre est multipliée par la valeur propre correspondante :

Exp(j2πft)	devient	H(f) Exp(j2πft)
Exp(-j2πft)	devient	H(-f) Exp(-j2πft)

Le terme réel en cosinus devient donc : $\frac{1}{2}\left[H(j2\pi f).e^{j2\pi ft} + H(-j2\pi f).e^{-j2\pi ft}\right]$

Mais ce signal réel est forcément une sinusoïde de fréquence f

$$A.\cos(2\pi ft + \varphi)$$

qui s 'écrit aussi $\frac{A}{2}\left[e^{j2\pi ft} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi ft} e^{-j\varphi}\right]$

Par identification :

$$H(j2\pi f) = \frac{A}{2}.e^{j\varphi} \qquad H(-j2\pi f) = \frac{A}{2}.e^{-j\varphi}$$

la fonction de transfert possède une symétrie hermitienne .

Dans tout ce qui suit nous représenterons les fonctions de transfert , et les transformées de Fourier sur un axe de -∞ à +∞ en n'oubliant pas que les parties pour f>0 et f<0 sont indissociables

Formule fondamentale des systèmes linéaires

C'est une conséquence de ce qui précède.

Tout signal peut être développé en intégrale de Fourier c'est à dire être considéré comme la somme d'un nombre infini de composantes exponentielles complexes.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j2\pi f).e^{j2\pi ft} df$$

mais chacune de ces composantes $X(j2\pi f).e^{j2\pi ft} df$ est une fonction propre de l'opérateur linéaire, et se trouve donc multipliée par la valeur propre associée, donc devient :

$$H(j2\pi f).X(j2\pi f).e^{j2\pi ft} df$$

Le système obéit au principe de superposition, le signal de sortie est donc une combinaison linéaire des valeurs précédentes , soit :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j2\pi f).X(j2\pi f).e^{j2\pi ft} df.$$

expression montrant que la transformée de Fourier du signal de sortie est :

$$\boxed{Y(j2\pi f) = H(j2\pi f).X(j2\pi f)}$$

C'est la formule fondamentale bien connue des systèmes linéaires .

Remarque :

Exp(pt) est une fonction propre de l'opérateur linéaire , or une fonction peut également être représentée en utilisant une transformée de Laplace :

$$x(t) = \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} X(p).e^{pt} dp \qquad avec \qquad X(p) = \int_{0}^{\infty} x(t).e^{pt} dt$$

par un raisonnement strictement identique au précédent on obtient la relation entre les transformées de Laplace :

Y(p) = X(p).H(p)

qui est employée en théorie des filtres .

- Les 4 théorèmes

Nous citerons ici 4 résultats que l'on utilise très souvent :

1° Théorème de Parceval

a) Considérons un signal d'énergie finie (impulsionnel) Cette énergie est

$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$ qui peut aussi s'écrire en développant l'un des termes sur une base de fonctions (base discrète , k est un entier)

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\sum_k a_k \phi_k dt = \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\phi_k(t)dt$$

mais l'intégrale est à une conjugaison près un produit scalaire $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\phi_k(t)dt = a_k^{\times}$

soit $W = \sum_k |a_k|^2$ L'énergie totale est la somme des carrés des termes du développement

Cette suite de nombres constitue le spectre d'énergie du signal sur la base φ_k, il s'agit d'un spectre de raies .

Pour un signal appartenant à L1 et possédant donc une transformée de Fourier

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f).\exp(j2\pi ft)df.dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f)\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\exp(j2\pi ft)dt.df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j2\pi f)|^2.df$$

Un intervalle de fréquence df transporte une énergie |X(j2πf)|²df ;le terme $S_x(f)$=|X(j2πf, est la **densité spectrale d'énergie du signal ou DSE** .(unité Joules par hertz)

Cette relation $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j2\pi f)\right|^2 df}$ constitue le Théorème de Parceval

Compte tenu de la formule fondamentale des systèmes linéaires , la relation entre la DSE des signaux d'entrée et de sortie d'un filtre linéaire est donc :

$$\boxed{S_Y(f) = \left|H(j2\pi f\right|^2 . S_x(f)}$$

b) signaux périodiques

Ces signaux n'appartiennent pas à L1, ils ont une énergie totale infinie, ils n'ont pas de transformée de Fourier mais seulement une décomposition en série de Fourier .C'est la théorie des distributions qui a permis d'unifier ces deux notions . Il faut dans ce cas travailler en terme de puissance moyenne .

Cette puissance moyenne vaut :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t).\sum_n c_n \exp(j2\pi n\frac{t}{T}) = \sum_n c_n \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(j2\pi n\frac{t}{T})dt = \sum_n \left|c_n\right|^2$$

La puissance moyenne est la somme des carrés des modules coefficients .Ce résultat reste bien sûr valable pour toute autre base de fonctions orthogonales .

c) Signaux d'énergie totale infinie n'ayant pas de transformée de Fourier

Il n'existe pas de signaux physiques déterministes de ce type ; ce serait par exemple le cas de xt)=1/t non réalisable car infini pour t=0, mais les bruits aléatoires entrent dans cette catégorie

Limitons le signal à une durée T (de –T/2 à +T/2) , nous obtenons un signal $x_T(t)$ de durée finie donc d'énergie finie, Sa transformée de Fourier $X_T(j2\pi f)$ existe .Il possède une puissance moyenne : $\overline{P_T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)^2\, dt$

Un calcul analogue au précédent conduit à :

$$\overline{P_T} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|X_T(j2\pi f\right|^2 df$$

Il suffit de faire tendre T vers l'infini pour définir la puissance moyenne du signal initial :

$$\overline{P} = Lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|X_T(j2\pi f\right|^2 df$$

Cette puissance est comme plus haut répartie le long de l'axe des fréquences, on défini une **densité spectrale de puissance (DSP**) ou spectre de puissance

$S(f) = Lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|X_T(j2\pi f)\right|^2$ qui à la traversée d'un filtre linéaire subit la même transformation que la DES du cas précédent .

2° Théorème du retard .

C'est une simple propriété due essentiellement à la forme particulière des fonctions propres d'une base de Fourier. .

$x(t-t_0)$ à pour transformée $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt$

en posant $t'=t-t_0$ il vient : $\int x(t').e^{-j2\pi ft}.e^{-j2\pi ft_0}dt = X(j2\pi f).e^{-j2\pi ft_0}$

Le retard se traduit par un déphasage de la transformée.
Ce théorème n'existe pas bien sûr pour une base différente .

3° Théorème du produit de convolution

Lui aussi n'existe que pour Fourier .
Soient deux fonctions x et y de transformées de Fourier X et Y .On peut écrire :

$$X(f).Y(f) = \int x(\theta).e^{-j2\pi f\theta}d\theta.\int y(u).e^{-j2\pi fu}du$$

en posant $u=t-\theta$ $du=dt$ (car θ est une constante pour la seconde intégrale)

$$X(f).Y(f) = \iint x(\theta).y(t-\theta)d\theta.e^{-j2\pi ft}dt$$

Il est d'usage de définir le produit de convolution :

$$[x \otimes y](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u).y(t-u)du$$

L'équation ci dessus devient :

$$X(f).Y(f) = \int (x \otimes y).e^{-j2\pi ft}dt$$

Ce qui montre que la transformée de Fourier du produit de deux fonctions est le produit de convolution de leurs transformées. C'est un résultat essentiel . On notera

$$x.y \ \underset{\Im}{\Rightarrow} \ X \otimes .Y \quad \text{ou} \quad x \rightarrow \Im \rightarrow \otimes$$

4° Théorème de Wiener Kintchine

C'est de très loin le plus important des 4
La fonction d'autocorrélation d'un signal déterministe x(t) d'énergie finie est définie par

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x(t-\tau)dt$$

On peut l'écrire aussi :

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f).e^{j2\pi f(t-\tau)}dfdt$$

on en intervertissant les termes sous le signe somme :

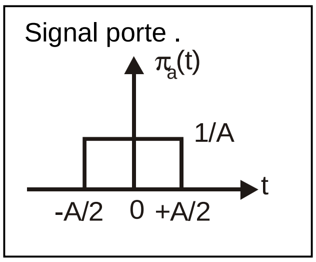
$$R_X(\tau) = \int X(j2\pi f).\int x(t).e^{j2\pi ft}dt.e^{-j2\pi f\tau}df = \int \left|X(j2\pi f)\right|^2 e^{-j2\pi f\tau}df$$

Ce qui montre que la transformée de Fourier de Rx est le spectre d'énergie

Spectre d'énergie et fonction d'autocorrélation sont transformées de Fourier l'une de l'autre .

C'est le théorème annoncé .
Pour un signal à énergie infinie nous verrons que ce théorème subsiste .

- Transformée de Fourier et signaux test



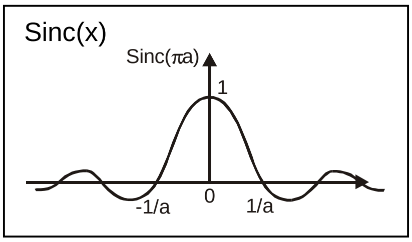
Les signaux test sont des signaux physique ou non de caractéristiques bien connues destinés à tester le comportement des systèmes .

Le signal porte

Signal idéal dont l'intérêt est surtout théorique, il est non causal puisque centré sur l'instant 0

C'est un signal absolument intégrable de transformée de Fourier :

$$\Pi_A(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_A(t).\exp(-j2\pi ft)dt = \frac{\sin(\pi fA)}{\pi fA}$$



la fonction $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sin c(x)$ est appelée sinus cardinal , elle joue un rôle important en traitement de signal , sa forme est représentée ci contre .

On notera :

- Le signal porte à une surface totale égale à 1
- Sa transformée de Fourier est réelle . A ce propos il est facile de montrer que la transformée de Fourier d'un signal est réelle d'il est centré sur l'instant 0 , c'est à dire x(t)=x(-t)
- 90% de l' énergie du signal est contenue dans le lobe central de largeur A , ainsi le produit : durée du signal .largeur du spectre est de l'ordre de l'unité Ce résultat est général et bien connu des électroniciens ; pour passer des impulsions de durée τ il faut un amplificateur de fréquence de coupure de l'ordre de $1/\tau$.

Passage à la limite fonction de Dirac des physiciens .

Le produit d'une fonction de t par le signal porte de largeur A , limite le signal à une fenêtre de largeur A centrée sur l'origine. L'intégrale suivante est l'énergie de ce signal tronqué .

$$W_A = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_A(t).f(t)dt$$

Notons que nous avons repoussé à l'infini les bornes d'intégration ce qui ne change en rien le résultat puisque le terme à intégrer est nul en dehors de $\pm$A.

Que devient dette intégrale si la largeur A tend vers zéro ?

$$Lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_A(t).f(t)dt$$

Avant l'introduction des distributions les physiciens faisaient le raisonnement suivant :

Si A tend vers zéro la seule valeur de f(t) qui intervient est f(0) , valeur constante que l'on peut sortir du signe somme : $Lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_A(t).f(t)dt = f(0).Lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_A(t).dt$

Mais pour toute valeur de A non nulle la somme de π_A(t) vaut 1 , il doit en être de même à la limite et l'on écrit alors : $Lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_A(t).f(t)dt = f(0).Lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_A(t).dt = f(0)$

On introduit alors la fonction de Dirac δ(t) $\delta(t) = Lim_{A\to 0}\pi_A(t)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)dt = f(0)$

En réalité ce passage à la limite intuitif n'est pas valable la fonction δ nulle partout sauf à l'origine et de surface 1 ne peut pas exister .L'intégrale précédente n'a pas mathématiquement de sens, nous l'utiliserons malgré tout mais avec précautions.

C'est Laurent Schwartz qui en introduisant la théorie des distributions à résolu le problème.

Théorie des Distributions (rappels rapides **)**

. Laurent Schwartz introduit des fonctions de base φ(t) définies dans un intervalle D , indéfiniment dérivables et nulles aux bornes de D .

Une distribution est alors un opérateur (fonctionnelle linéaire) qui à toute fonction φ fait correspondre un nombre .

On notera (D,φ)=nombre

Par exemple $\int_D f(u).\varphi(u).du = nombre$

La fonction f est utilisée pour définir la distribution, elle s'identifie avec cette dernière .

Ainsi il est naturel de définir la dérivée d'une distribution à partir de la dérivée de la fonction soit :

$$(f',\varphi) = \int_D f'(\theta)\varphi(\theta)d\theta$$

Mais une intégration par partie avec $\begin{cases}\varphi(\theta) = u \\ \dfrac{df}{d\theta}d\theta = v\end{cases}$ *donne*

$$(f',\varphi) = [f.\varphi]_D - \int_D f.\varphi' = -(f,\varphi')$$

En effet le premier terme est nul car φ *est nulle aux bornes*

Soit la relation essentielle $\boxed{(f'\varphi) = -(f,\varphi')}$ *qui est généralisable à toute fonction même non dérivable puisque la fonction de base* φ *est toujours dérivable par définition.*

Une distribution définie ainsi à partir d'une fonction est dite ***régulière****.*

Mais toute opération qui à toute fonction de base fait correspondre un nombre peut définir une distribution, ainsi la distribution de Dirac qui fait correspondre à une fonction sa valeur à l'origine .Soit

$(\delta,\varphi) = \varphi(0)$

Si la fonction δ *existait on aurait l'intégrale :* $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t).\varphi(t)dt = \varphi(0)$ *, c'est l'intégrale des physiciens. Ainsi la théorie des distributions donne un sens à une notation qui n'est pas mathématiquement valable. En pratique on rencontrera souvent cette formule, il faut retenir que le signe* δ *ne peut être utilisé que s'il reste sous le signe somme .*

Une distribution qui n'est ainsi reliée à aucune fonction est ***non régulière*** *, mais nous admettrons que la formule de dérivation écrite plus haut reste valable , ainsi il est possible de définir la dérivée d'un Dirac qui physiquement n'a aucun sens.*

En effet :

$$(\delta',\varphi) = -(\delta,\varphi') = -\varphi'(0)$$

La distribution qui est la dérivée de δ *fait correspondre à une fonction la valeur à l'origine de sa dérivée (au signe près) .*

Un résultat également classique est la dérivée de l'échelon E (E=0 pour t<0 et E=1 pour t>=0)

$$(E',\varphi) = -(E,\varphi') = -\int_0^1 1.\frac{d\varphi}{du}du = -[\varphi(\infty) - \varphi(0)] = \varphi(0)$$

car la fonction φ *est nulle aux bornes ,* $\varphi(\infty)=0$*.*

La distribution E' fait correspondre à une fonction sa valeur à l'origine, c'est une distribution δ*. Ce résultat considéré comme intuitif, (la dérivée de E est nulle partout et infinie à l'origine) ,est ainsi justifié.*

On peut définir de même , bien que cela soit mathématiquement plus délicat, la transformée de Fourier d'une distribution :

$$(\Im f,\varphi) = (f,\Im\varphi)$$

Un électronicien admet assez facilement que la transformée de Fourier d'un top de Dirac soit égale à l'unité (spectre infini) l'expression précédente permet de le montrer , en effet :

$$(\Im\delta,\varphi) = (\delta,\Im\varphi) = \Phi(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\exp(-j2\pi fu)du\right]_{f=0} = \int_{-\aleph}^{\infty}1.\varphi(u)du$$

La comparaison des deux expressions extrêmes montre que $\Im\delta \equiv 1$

Inversement on serait tenté d'écrire la transformée inverse :

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1.\exp(j2\pi ft)df = \delta(t)$$

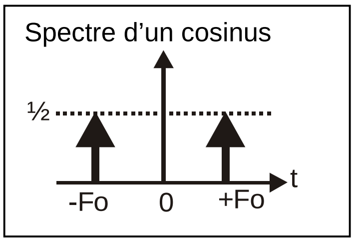
qu'il est facile de justifier physiquement . (La somme d'une infinité de cosinusoïdes de toutes fréquences est nul pour tout t sauf à 0 car alors tous les cosinus valent 1 et leur somme est infinie) .

Applications des ' fonctions ' δ

Spectre d'un signal sinusoïdal

Une fonction cos(2πft) est la somme de deux fonctions de base de l'opérateur de Fourier ,sa transformée de Fourier comporte donc deux termes seulement d'amplitude ½ pour les fréquences ±f. En termes de distributions on écrira :

$$\Im(\cos 2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) ;$$



Fonction δ et produit de convolution ;

La fonction δ est la fonction unité de l'opérateur de convolution .

$$\delta(t) \otimes f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-u).f(u)du = f(t)$$

(Remarque : le produit de convolution peut être défini par $\int f(u).g(t-u)du \quad ou \int f(t-u).g(u)du$, on peut passer de l'une à l'autre par changement de variable)

De même :

$$\delta(t-\tau) \otimes f(t) = f(t-\tau)$$

Dans l'opération de convolution la fonction δ décalée provoque un décalage de la fonction .Ce résultat sera utilisé très fréquemment par la suite .

Peigne de Dirac

C'est la périodisation d'un top de Dirac avec la période T .

Nous noterons : $pgn_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$

La transformée de Fourier d'un δ étant égal à 1 , la transformée du peigne précédent est , en vertu du théorème du retard :

$$Pgn_T(j2\pi f) = \sum_k 1.\exp(-j2\pi fkT)$$

Mais le peigne de Dirac est une fonction périodique de période T , il est donc possible de la décomposer en série de Fourier :

$$pgn_T(t) = \sum_k c_k \exp(j2\pi k \frac{t}{T})$$ avec

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} pgn_T(t).\exp(-j2\pi k \frac{t}{T})dt$$

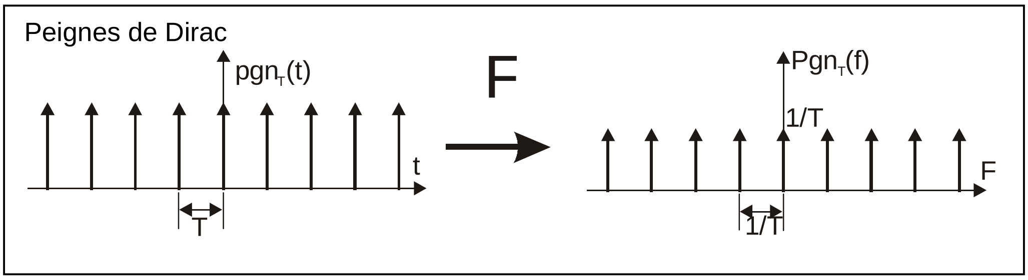
Mais dans l'intervalle ±T/2 il n'y a qu'une seule dent du peigne ,c'est un δ, soit :

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).\exp(-j2\pi fk \frac{t}{T})dt = \frac{1}{T}\left[\exp(-j2\pi fk \frac{t}{T})\right]_{t=0} = \frac{1}{T}$$

Toutes les raies du spectre ont la même amplitude 1/T .On notera donc symboliquement la transformée de Fourier du peigne de Dirac :

$$\Im(pgn_T(t)) = \frac{1}{T} pgn_{F=1/T}(f) = \frac{1}{T}\sum_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac dans le domaine temps est un peigne de Dirac dans le domaine fréquence



Périodisation d'un motif

Un signal x(t) de durée finie de transformée de Fourier X(j2πf) est reproduit périodiquement le long de l'axe des temps ,le signal ainsi construit est la sommation de ces motifs décalés.

Soit : $$\sum_k x(t-kT)$$

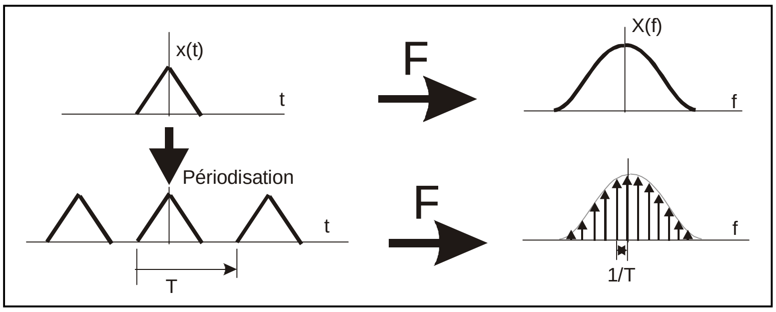
Peut s'écrire en vertu du résultat précédent : $\sum_k x(t)\otimes\delta(t-kT) = x(t)\otimes\sum_k \delta(t-kT)$

La transformée du produit de convolution est un produit normal , il vient donc :

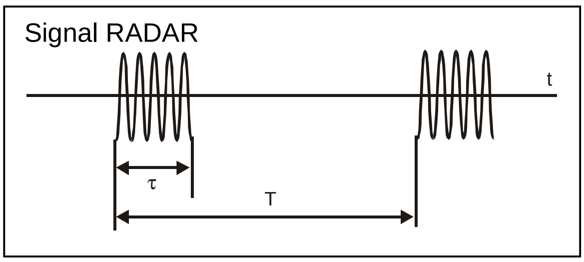
$$\Im\left(\sum_k x(t-kT)\right) = X(j2\pi t).\frac{1}{T}\sum_k \delta(f-\frac{k}{T})$$

Ce résultat est illustré sur la figure suivante .On dit que la périodisation du motif provoque un échantillonnage de son spectre, nous retrouverons ce résultat plus loin .

τ



Exemple : Spectre d'un signal RADAR .



E motif répété avec la période T est une salve de sinusoïdes de fréquence fo et de durée τ (figure ci contre) .

Ce motif a pour expression :

$$\cos(2\pi f_O t).\pi_\tau(t)$$

Sa transformée de Fourier est donc :

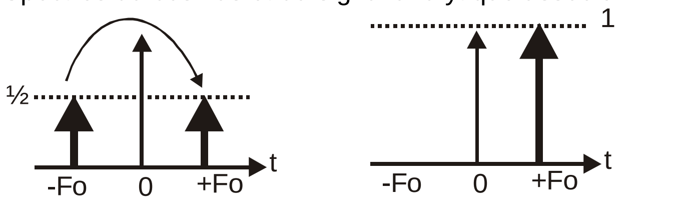
$$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\otimes\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\pi(f-f_0)\tau}{\pi(f-f_0)\tau}+\frac{\sin\pi(f+f_0)\tau}{\pi(f+f_0)\tau}\right]$$

SIGNAUX ANALYTIQUES ET TRANSFORMATION DE HILBERT

Définitions

Au signal physique cos(2πft) on a fait correspondre le signal analytique exp(j2πft) dont le signal physique est la partie réelle .C'est ce que l'on fait lorsque l'on utilise la notation complexe pour étudier les réseaux. Or on peut remarquer que le spectre (dans ce qui suit nous utiliserons souvent le terme de spectre au lieu de transformée de Fourier) du signal analytique est obtenue en repliant sur la partie droite de l'axe des fréquence la partie négative du spectre du signal physique.

Spectres du cosinus et du signal analytique associé :



Spectre du cosinus   Spectre de exp(2πfot)

Cette même opération peut être appliquée à un signal quelconque et permet de définir son signal analytique associé.

Nous désignerons par $a_x(t)$ le signal analytique associé à x(t) (de transformée X(j2πf)) et $A_x(j2\pi f)$ son spectre .

Alors ce spectre est défini par

$$\begin{cases} A_x(j2\pi f) \equiv 0 \quad pour \quad f < 0 \\ A_x(j2\pi f) \equiv 2.X(j2\pi f) \quad pour \quad f \geq 0 \end{cases}$$

C'est à dire :

$$A_x(j2\pi f) = X(j2\pi f) + Sign(f).X(j2\pi f) \qquad (1)$$

Le signal analytique lui même est obtenu en effectuant la transformée de Fourier inverse de cette expression. Mais il faut connaître la transformée de la fonction sign(x) qui vaut –1 pour x<0 et +1 pour x>0.

Remarquons pour cela que :

$$X(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\exp(-j2\pi ft)dt$$

a pour dérivée : $\dfrac{dX}{df} = \int -j2\pi t.x(t).\exp(-j2\pi ft)dt$

expression qui montre que -j2πt.x(t) est la transformée de dX/dt
Prenons alors X=sign(f).

$$\Im\left(\frac{d(sign(f))}{df}\right) = -j2\pi t.\Im(sign(f))$$

mais comme il a été vu plus haut :

$$\frac{d(sign(f))}{df} = 2\delta(t) \quad donc \quad \Im\left(\frac{d(sign(f))}{df}\right) = 2$$

compte tenu de la ligne précédente :

$$\Im(sign(f)) = \frac{-1}{j\pi t} = \frac{j}{\pi t}$$

La transformée de l'expression (1) conduit à :

$$a_x(t) = x(t) + \frac{j}{\pi t} \otimes x(t)$$

Le calcul du produit de convolution, pose un problème de convergence, il faut prendre pour l'intégrale la valeur principale de Cauchy Pour une fonction f(t) non définie pour t=a

$$VP\int f(u)du = Lim_{e \to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-e} f(u)du + \int_{a+e}^{\infty} f(u)du\right)$$

Dans le cas présent

$$\frac{1}{\pi t}\otimes x(t)=\frac{1}{\pi}VP\int_{-\infty}^{\infty}x(u).\frac{1}{t-u}du$$

Cette expression est par définition la **transformée de Hilbert** de x(t)

$$H(x(t))=\frac{1}{\pi t}\otimes x(t)$$

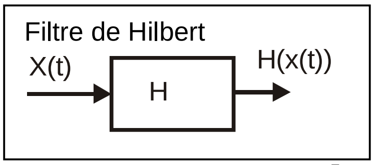
Le signal analytique est donc : $\boxed{a_x(t)=x(t)+jH(x(t))}$ le signal physique en est bien sa partie réelle .

Propriétés de la transformée de Hilbert

C'est une transformation qui se limite au domaine temps contrairement à la transformée de Fourier.

Le filtre de Hilbert est un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est 1/πt, il n'est donc pas causal .La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H_H(j2\pi f)=\Im\left(\frac{1}{\pi t}\right)=-j.sign(f)$$



Il possède bien une symétrie hermitienne .
Appliquons cette transformation à une sinusoïde :

$$\frac{1}{2}[\exp(j2\pi ft)+\exp(-j2\pi ft)] \quad devient \quad \frac{1}{2}[H_H(f>0).\exp(j2\pi ft)+H_H(f<0)\exp(-j2\pi f)]$$

$$soit \qquad \frac{1}{2}[-j.\exp(j2\pi ft)+j.j.\exp(j2\pi ft)]=\frac{1}{2j}[\exp(j2\pi ft)-\exp(-j2\pi ft)]=\sin(2\pi ft)$$

Le filtre de Hilbert transforme un cosinus en sinus, c'est un **quadrateur parfait**. Il n'est malheureusement pas physiquement réalisable car non causal , on peut seulement réaliser des quadrateurs fonctionnant dans une bande limitée de fréquence .

Propriété d'un filtre causal

Pour un filtre causal on peut écrire h(t)=h(t).sign(t) en effet pour f<0 h(t)=-h(t) ne peut être satisfaite que si h(t)=0.

La transformée de Fourier de cette relation donne

$$H(j2\pi f)=H(j2\pi f)\otimes\frac{-j}{\pi f}$$

Posons H(j2πf)=HR+jHI Parties réelle et imaginaire de H

$$HR(f)\otimes\frac{-j}{\pi f}+jHI(f)\otimes\frac{-j}{\pi f}=-j.HR(f\otimes\frac{1}{\pi f}+HI(f)\otimes\frac{1}{\pi f}$$

On voit que
$$HR(f)=H[HI(f)]$$
$$HI(f)=-H[HR(f)]$$

Au signe près parties réelle et imaginaires sont transformées de Hilbert l'une de l'autre .

Propriétés des signaux analytiques (signal analytique et système linéaire)

Pour un filtre linéaire les spectres d'entrée et de sortie sont reliés par :

Y(j2πf)=H(j2πf).X(j2πf)

En introduisant la fonction U(t)=0 pour t<0 et 1 pour t>0 le spectre du signal analytique correspondant est :

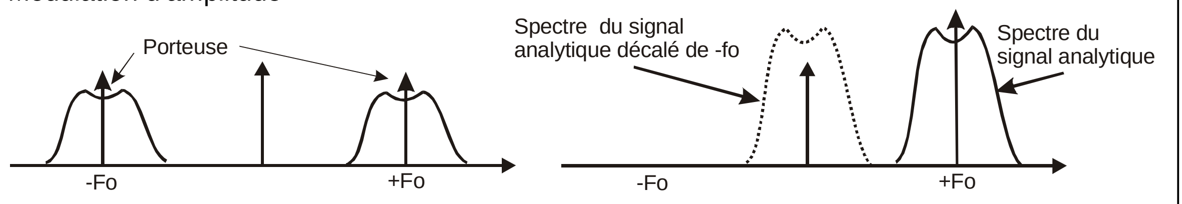
$$A_Y(f) = 2.U(f).Y(f) = 2.U(f)H(f)X(f) = H(f)A_X(f)$$

Les signaux analytiques se transforment à travers un système linéaire comme les signaux réels qui leurs sont associés.

Cas particulier des signaux à bande étroite :enveloppe complexe.

Considérons d'abord un signal modulé en amplitude. Son spectre est obtenu en décalant de part et d'autre de la porteuse le spectre du signal BF modulant, résultat classique.

Modulation d'amplitude

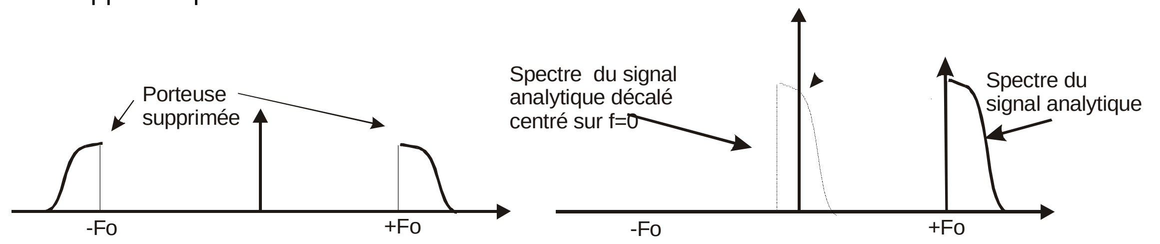


Spectre d'une modulation d'amplitude

La figure ci dessus représente le spectre du signal analytique $A_x(f)$ ainsi que ce qu'il devient si on le décale de –fo . $A_x(f+fo)$ est centré sur l'origine , c'est au facteur 2 près exactement le spectre du signal BF modulant , qui apparaît à l'oscilloscope comme l'enveloppe du signal HF .

Dans le cas ou le spectre de Ax n'est pas symétrique par rapport à une porteuse , sa translation autour de l'origine ne possède pas la symétrie hermitienne, Le signal BF correspondant n'est plus réel, on l'appelle enveloppe complexe , nous la noterons $\alpha_x(t)$

Enveloppe complexe non réelle : modulation BLU



Spectre d'une modulation BLU

Dans le cas général :

$$\alpha_x(t) = \Im\left[A_x(j2\pi(f + f_0)\right] = a_x(t).\exp(-j2\pi f_0 t) \qquad \text{en vertu du théorème du retard}$$

Soit finalement :

$$\boxed{x(t) = Re\left[a_x(t)\right] = Re\left[\alpha_x(t).\exp(j2\pi f_0 t\right]}$$

Cette enveloppe complexe n'a d'intérêt que si le signal x est à bande étroite , c'est alors un signal BF le plus souvent complexe.

Représentation de l'enveloppe complexe .

Ces représentations n'ont d'intérêt que si le signal est à bande étroite .

1° Représentation en phase et quadrature

On pose $\alpha_x(t) = p(t) + jq(t)$

Le signal analytique s'écrit alors

$$a_x(t) = \alpha_x(t).\exp(j2\pi f_0 t) = \left[p(t) + jq(t)\right]\left[\cos 2\pi f_0 t + j\sin 2\pi f_0 t\right]$$

dont la partie réelle est :

$$x(t) = Re\left[a_x(t)\right] = p(t).\cos 2\pi f_0 t - q(t)\sin 2\pi f_0 t$$

p(t) et q(t) sont des signaux BF qui modulent en amplitude deux porteuses en quadrature.
On rencontre souvent cette décomposition en télécommunications (TV PAL ou NTSC, modulations numériques à plusieurs états de phase)

2° Représentation en module et phase

On pose cette fois $\alpha_x(t) = a(t); e^{j\phi(t)}$

Soit $a_x(t) = \alpha_x(t).\exp(j2\pi f_0 t) = a(t).\exp(j2\pi f_0 t + \phi(t))$

Dont la partie réelle est :

$$x(t) = a(t).\cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

a(t) est l'amplitude instantanée, ϕ(t) la phase instantanée.
Pour un signal à bande étroite le signal x(t) apparaît à l'oscilloscope comme une porteuse de fréquence voisine de fo , dont l'amplitude varie lentement [a(t)] et dont la phase fluctue [ϕ(t)].